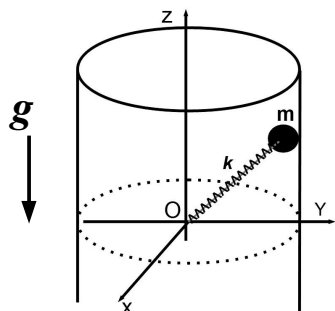


- (α) Πώς ορίζεται το ελλειψοειδές αδράνειας ενός στερεού σώματος; Ποιά κύρια διεύθυνση του ελλειψοειδούς αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη τιμή της ροπής αδράνειας;
(β) Διατυπώστε το θεώρημα των παραλλήλων αξόνων (θεώρημα Steiner)
- Δείξτε ότι, σε ένα σύστημα n βαθμών ελευθερίας, αν υπάρχει αγνοήσιμη συντεταγμένη, τότε η τάξη του συστήματος των εξισώσεων του Hamilton υποβιβάζεται κατά δύο.

- Η μάζα m του σχήματος είναι υποχρεωμένη να κινείται υπό την επίδραση ομογενούς πεδίου βαρύτητας $\vec{g}$ επάνω στην επιφάνεια ορθού κυλίνδρου, απείρου μήκους και ακτίνας a . Ο άξονας συμμετρίας του κυλίνδρου είναι παράλληλος στη διεύθυνση του πεδίου βαρύτητας. Η μάζα συνδέεται με ελατήριο σταθεράς k και φυσικού μήκους a , το ένα άκρο του οποίου είναι ακλόνητα συνδεδεμένο στο σημείο O . Να υπολογίσετε:

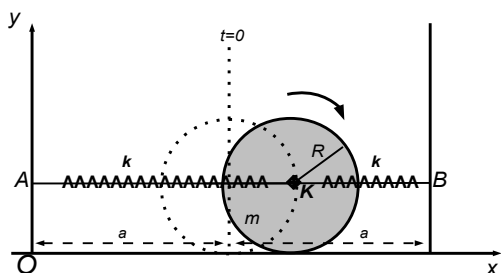


- τους βαθμούς ελευθερίας, τους δεσμούς της κίνησης, και τη συνάρτηση Lagrange
- τα ολοκληρώματα και τις διαφορικές εξισώσεις της κίνησης,

(γ) τι κίνηση θα εκτελέσει η m αν αρχικά τοποθετηθεί χωρίς ταχύτητα σε θέση με κατακόρυφη συντεταγμένη z_0 που

$$\text{ικανοποιεί τη σχέση } \frac{a - \sqrt{a^2 + z_0^2}}{\sqrt{a^2 + z_0^2}} k z_0 = m g \quad ;$$

- Ομογενής κυκλικός δίσκος μάζας m και ακτίνας R κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει κατά μήκος του Ox , διατηρώντας πάντοτε το επίπεδό του παράλληλο με το επίπεδο Oxy . Το κέντρο του δίσκου K συνδέεται με τα τοιχώματα του σχήματος στα σημεία A και B , μέσω δύο ίδιων ελατηρίων, σταθεράς k και φυσικού μήκους a . Αρχικά, ο δίσκος ισορροπεί στο μέσον του ευθύγραμμου τμήματος $AB=2a$. Να βρεθούν:



- οι εξισώσεις Lagrange
- η συνάρτηση Hamilton και τα ολοκληρώματα της κίνησης
- η θέση ισορροπίας και η συχνότητα των μικρών ταλαντώσεων

- Το έντυπο των θεμάτων να παραδοθεί μαζί με το γραπτό
- Διάρκεια εξετάσεων: **2 1/2** ώρες
- Τα θέματα **(1)** και **(2)** δίνουν από **2 μονάδες** (ισοδύναμα υποερωτήματα). Τα θέματα **(3)** και **(4)** από **3 μονάδες**

$$\text{Δίνεται: } T = \frac{1}{2} m v_0^2 + \vec{v}_0 \cdot (\vec{\omega} \times m \vec{r}_K) + \frac{1}{2} I \omega^2$$

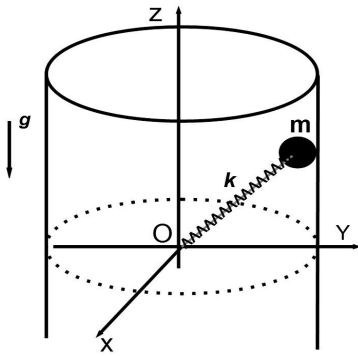
$$\text{Ροπή αδράνειας κυκλικού δίσκου (ως προς K): } I = mR^2/2$$

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΙΙ

Εξεταστική Περίοδος Φεβ. 2013

Λύσεις των Ασκήσεων

Θέμα 3:



Το καταλληλότερο σύστημα συντεταγμένων για το πρόβλημα είναι οι κυλινδρικές, ρ , ϕ , z .

Υπάρχει ένας δεσμός της κίνησης: $\rho = a$ (σκληρόνομος), οπότε το σύστημα έχει **δύο** βαθμούς ελευθερίας. Θεωρούμε ως γενικευμένες συντεταγμένες την κατακόρυφη θέση z και τη γωνία ϕ που σχηματίζει η προβολή του διανύσματος θέσης της στο επίπεδο xy με τον άξονα Ox .

Οι τύποι μετασχηματισμού των καρτεσιανών συντεταγμένων του σώματος είναι:

$$x = a \cos \phi, \quad y = a \sin \phi, \quad z = z.$$

Κινητική ενέργεια:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m (a^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2).$$

Δυναμική ενέργεια σώματος

$$V = mgz + \frac{1}{2} k (\sqrt{a^2 + z^2} - a)^2 \text{ αφού } \Delta l = r - a = \sqrt{a^2 + z^2} - a \text{ είναι η επιμήκυνση}$$

του ελατηρίου. Επομένως, η συνάρτηση Lagrange είναι:

$$L = T - V = \frac{1}{2} (a^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - mgz - \frac{1}{2} k (\sqrt{a^2 + z^2} - a)^2$$

(β) Επειδή η συνάρτηση Lagrange δεν εξαρτάται ρητά από το χρόνο υπάρχει το ολοκλήρωμα Jacobi:

$$J = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \dot{z} - L = T + V$$

το οποίο ταυτίζεται με τη μηχανική ενέργεια του συστήματος, μιας και οι μετασχηματισμοί μεταξύ καρτεσιανών και γενικευμένων συντεταγμένων δεν εξαρτώνται ρητά από το χρόνο. Επίσης, επειδή η ϕ είναι αγνοήσιμη, υπάρχει το αντίστοιχο ολοκλήρωμα της ορμής:

$$p_{\phi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = ma^2 \dot{\phi} = ct.$$

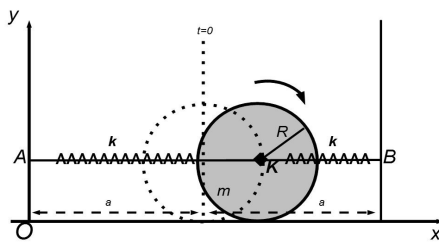
Οι εξισώσεις κίνησης (εξ. Lagrange) είναι:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \rightarrow m \ddot{z} + mg + k \frac{(\sqrt{a^2 + z^2} - a)}{\sqrt{a^2 + z^2}} z = 0$$

και $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \rightarrow m a^2 \ddot{\phi} = 0$

(γ) Για να βρούμε τη θέση ισορροπίας $z = z^*$, $\phi = \phi^*$ του σώματος θα θέσουμε στις εξισώσεις κίνησης $\dot{z} = \ddot{z} = \dot{\phi} = \ddot{\phi} = 0$. Οπότε, βρίσκουμε ότι η ϕ^* μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή ενώ η συντεταγμένη z^* ικανοποιεί τη σχέση που δίνεται στην εκφώνηση. Επομένως, αν το σώμα τοποθετηθεί αρχικά **χωρίς ταχύτητα** ($\dot{z} = \dot{\phi} = 0$) στη θέση z_0 , τότε θα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας και θα παραμείνει εκεί ακίνητο για πάντα.

Θέμα 4:



Ο δίσκος έχει **ένα βαθμό ελευθερίας**, αφού κινείται μόνο κατά τον άξονα Ox ($y_K=R$) και μάλιστα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, οπότε $\dot{x} = R\dot{\phi}$, όπου x το μήκος του τόξου που διαγράφει ο δίσκος και ϕ η γωνία που σχηματίζει μια σταθερή διεύθυνση του δίσκου με τον άξονα Oy. Επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως συντεταγμένη είτε την απομάκρυνση του κέντρου μάζας από το O (την x_K) είτε την απομάκρυνση από την αρχική θέση ισορροπίας στο μέσον του AB (x) ή τη γωνία ϕ .

Ολοκληρώνοντας τη συνθήκη κύλισης παίρνουμε $\dot{x} = R\dot{\phi} \rightarrow x - x_0 = R(\phi - \phi_0)$. Έτσι, αν επιλέξουμε π.χ. ως συντεταγμένη την x , τότε για $t=t_0$ πρέπει να είναι $x_0=0$ κι επομένως $\phi_0=0$.

Κινητική ενέργεια: $T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{4} m R^2 \dot{\phi}^2 \rightarrow$

$T = \frac{3}{4} m \dot{x}^2$ ή, αντίστοιχα για τη ϕ : $T = \frac{3}{4} m R^2 \dot{\phi}^2$

Δυναμική ενέργεια:

η βαρύτητα δεν παίζει ρόλο. Τα δύο ελατήρια έχουν **την ίδια** (κατά μέτρο) μεταβολή μήκους, $\Delta l_1 = l_1 - l_0 = AK - a = x$ και $\Delta l_2 = KB - a = (2a - AK) - a = -x$ και

$$V = \frac{1}{2} k \Delta l_1^2 + \frac{1}{2} k \Delta l_2^2 = k x^2 \quad (\text{ή} \quad V = k R^2 \phi^2)$$

οπότε η συνάρτηση του Lagrange είναι:

$$L = T - V = \frac{3}{4} m \dot{x}^2 - k x^2 \quad \text{ή} \quad L = \frac{3}{4} m R^2 \dot{\phi}^2 - k R^2 \phi^2$$

και η εξίσωση κίνησης θα είναι:

$$\frac{3}{2} m \ddot{x} + 2k x = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{3}{2} m R^2 \ddot{\varphi} + 2k R^2 \varphi = 0$$

Η γενικευμένη ορμή είναι: $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{3}{2} m \dot{x}$ και η συνάρτηση Hamilton δίνεται από τη σχέση

$$H = \dot{x} p - L = \frac{2 p^2}{3 m} - \frac{3}{4} m \left(\frac{2 p}{3 m} \right)^2 + k x^2 = \frac{p^2}{3 m} + k x^2 \text{ αφού γίνεται } \textbf{απαλοιφή} \text{ της } \dot{x}$$

(αντίστοιχα εάν έχετε επιλέξει τη γωνία φ)

Εφόσον ο χρόνος δεν εμφανίζεται άμεσα στην L και δεν υπάρχουν μετασχηματισμοί συντεταγμένων που να εξαρτώνται από το χρόνο, υπάρχει το ολοκλήρωμα του Jacobi και μάλιστα ταυτίζεται με τη μηχανική ενέργεια του συστήματος, $J=T+V$. Η ορμή δεν διατηρείται σταθερή, αφού η x (όπως και η φ αντίστοιχα) δεν είναι αγνοήσιμη.

Από την εξίσωση κίνησης βρίσκουμε τη θέση ισορροπίας, αν θέσουμε $\ddot{x}=0$ (ή, $\ddot{\varphi}=0$) οπότε προκύπτει $x_0=0=\varphi_0$. Η εξίσωση είναι ήδη γραμμική και έχει τη μορφή της εξίσωσης του απλού αρμονικού ταλαντωτή

$$\ddot{x} + \frac{4k}{3m} x = 0$$

με συχνότητα $\omega^2 = 4k/(3m)$.